Analiza 2 – Inżynieria Biomedyczna $\quad Z_5$

1. Sprawdzić tezę tw. Greena dla całki

   (a) $\oint\limits_C (xy-x)dx+(y-x^2)dy$, gdzie C jest brzegiem kwadratu $\overline{D}=[0,2]\times[0,2]$; (6p)

   (b) $\oint\limits_C (x+y)(x-y)dx$, gdzie C jest brzegiem tej ćwiartki koła $x^2+y^2\leqslant 9$, na której brzegu leżą punkty $(1,1)$ i $(0,3)$. (8p)

2. Wykorzystując całkę krzywoliniową, obliczyć pole deltoidy czyli figury ograniczonej krzywą $x(t)=2\cos t+\cos 2t,\ y(t)=2\sin t-\sin 2t,\ t\in[0,2\pi]$. (6p)

3. Wykazać, że wartość podanej całki nie zależy od drogi całkowania, a następnie ją obliczyć.

   (a) $\int\limits_{\widehat{AB}} (3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy$ (każdy przykład za 6p)
   po dowolnym łuku gładkim o początku $A=(2,-1)$ i końcu $B=(1,0)$;

   (b) $\int\limits_{\widehat{AB}} (2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$
   po dowolnym łuku gładkim o początku $A=(\pi,0)$ i końcu $B=(\pi,\pi)$;

   (c) $\int\limits_{\widehat{AB}} (2x+2ye^{2xy})dx+(2xe^{2xy}+2)dy$
   po dowolnym łuku gładkim od $A=(1,0)$ do $B=(2,\ln 2)$.

4. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int\limits_L \frac{dl}{2+xy}$ po odcinku $L=\overline{AB}$, gdzie $A=(0,1)$, $B=(1,0)$. (6p)

5. Obliczyć długość (każdy przykład za 6p)

   (a) wykresu funkcji $y(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ dla $x\in[-1,1]$;

   (b) kardioidy: $x(t)=2\cos t-\cos 2t,\ y(t)=2\sin t-\sin 2t,\ t\in[0,2\pi]$

6. Wyznaczyć współrzędne środka masy (x_m,y_m) (każdy przykład za 6p)

   (a) jednorodnej łamanej ABC (składa się ona z dwóch odcinków),

   (b) jednorodnej łamanej ABCD (składa się ona z trzech odcinków),

   gdzie $A=(0,1),\ B=(0,0),\ C=(1,0),\ D=(1,1)$.

Jeśli $\varrho(x,y)$ jest gęstością masy łuku L, to całka $M = \int\limits_L \varrho(x,y)dl$ wyraża masę tego łuku.

Całki $M_X = \int\limits_L y\varrho(x,y)dl$ i $M_Y = \int\limits_L x\varrho(x,y)dl$ przedstawiają momenty statyczne łuku L:
M_X – względem osi OX, M_Y – względem osi OY.

Współrzędne środka masy łuku L o gęstości $\varrho(x,y)$ wyrażają się następująco:

$$(x_m, y_m) = \Big(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\Big).$$