Analiza 2 – Inżynieria Biomedyczna

Z_4

1. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\displaystyle\int\limits_{\widehat{AB}} (e^x + y)dx + x(y - x)dy$

   od $A = (0, 0)$ do $B = (2, 1)$, gdy $\widehat{AB}$ jest

   (a) odcinkiem $\overline{AB}$;

   (b) łamaną ACB, gdzie $C = (2, 0)$;

   (c) łukiem paraboli $4y = x^2$;

   (d) łukiem paraboli $x = 2y^2$.

2. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną, korzystając z zamiany na całkę oznaczoną

   (a) $\displaystyle\int\limits_C (3 + 2y)dx + (y - 2x)dy$, gdzie C jest prawą połową okręgu $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ o początku $A = (-1, -1)$ i końcu $B = (-1, 1)$;

   (b) $\displaystyle\int\limits_C (2 - y)dx + xdy$, gdzie C jest pierwszym łukiem cykloidy o parametryzacji zgodnej z kierunkiem łuku: $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t \in [0; 2\pi]$;

   (c) $\displaystyle\int\limits_{\widehat{AB}} x^3dx + y^3dy$, gdzie $\widehat{AB}$ – górny łuk elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ o początku w punkcie $A = (-2, 0)$ i końcu $B = (2, 0)$;

   (d) $\displaystyle\oint\limits_C \cos(x + y)dx + ydy$, gdzie C jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (0, \frac{\pi}{2})$, skierowanym dodatnio względem wnętrza.

3. Korzystając z tw. Greena obliczyć całki krzywoliniowe skierowane,

   zakładając, że wszystkie krzywe są skierowane dodatnio względem odpowiedniego obszaru.

   (a) $\displaystyle\oint\limits_C \cos(x + y)dx + ydy$, gdzie C jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (0, \frac{\pi}{2})$;

   (b) $\displaystyle\oint\limits_C (2x^2 + y^2 - y)dx + (x^2 - y^2)dy$, $C:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$;

   (c) $\displaystyle\oint\limits_C \Big(3y^2 - \frac{y}{x^2 + y^2}\Big)dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$, $C:\ x^2 + (y + 3)^2 = 4$;

   (d) $\displaystyle\oint\limits_C (x+y)(x-y)dx + (x^2 + \cos(y^{2023}))dy$, C – brzeg trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (1, 1), (-1, 1)$;

   (e) $\displaystyle\oint\limits_C \Big(x\sqrt{x^2 + y^2} + 2xy\Big)dx + y\sqrt{x^2 + y^2}dy$, C – brzeg obszaru $\overline{D} = \{(x, y) :\ 1 \leqslant x \leqslant 2 - |y|\}$.