Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Niech $T \subseteq \mathbb{R},\ f : T \to \mathbb{C},\ T \ni t \mapsto x + iy = x(t) + jy(t) = z(t)$

1. jeśli $z_0 = x_0 + jy_0$, to $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z_0 \overset{df}{\iff} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0 \ \wedge\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$;
2. funkcja $z(t)$ jest ciągła w punkcie $t_0 \overset{df}{\iff}$ funkcje $x(t), y(t)$ są ciągłe w t_0;
3. $z'(t) \overset{df}{=} x'(t) + j \cdot y'(t)$;
4. $\int\limits_a^b z(t)dt \overset{df}{=} \int\limits_a^b x(t)dt + j \cdot \int\limits_a^b y(t)dt.$

Przykład 1.

a) Funkcja $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $z(t) = -1 + jt.$

Zbiorem wartości funkcji f jest odcinek pionowy o końcach -1 i $-1 + j$.

Pochodna funkcji: $z'(t) = j$;

całka: $\int\limits_a^b z(t)dt = \int\limits_a^b -1dt + j \cdot \int\limits_a^b tdt = \Big[-t\Big]_a^b + j\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_a^b$

b) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $z(t) = z_0 + r \cdot e^{jt}$,

gdzie $z_0 = x_0 + jy_0 \in \mathbb{C}$ ustalony punkt, $r \in \mathbb{R}_+$ ustalona liczba.

Zbiorem wartości funkcji f jest okrąg o środku w punkcie z_0 i promieniu r

(przebiegany wielokrotnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).

$z(t) = f(t) = x_0 + jy_0 + r(\cos t + j \sin t) = x_0 + r \cos t + j(y_0 + r \sin t)$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + r\cos t \\ y(t) &= y_0 + r\sin t \end{aligned}\right\}\quad \text{parametryzacja okręgu.}$$

Pochodna: $z'(t) = x'(t) + j \cdot y'(t) = -r \sin t + jr \cos t = jr(\cos t + j \sin t) = jre^{jt}$.

Interpretacja geometryczna:

Wektor o współrzędnych $(x'(t), y'(t))$ jest wektorem stycznym do krzywej $z(t)$ w punkcie $(x(t), y(t))$.

Całka: np. $\int\limits_0^\pi z(t)dt = \int\limits_0^\pi (x_0 + r \cos t)dt + j \int\limits_0^\pi (y_0 + r \sin t)dt = \Big[x_0t + r \sin t\Big]_0^\pi + j\Big[y_0t - r \cos t\Big]_0^\pi =$

$= \pi x_0 + j(\pi y_0 + 2r) = \pi z_0 + 2rj.$

Całkę można obliczyć inaczej:

$$\int\limits_0^\pi z(t)dt = \int\limits_0^\pi (z_0 + r \cdot e^{jt})dt = \Big[z_0t + \frac{r}{j} \cdot e^{jt}\Big]_0^\pi == \pi z_0 - jr(e^{j\pi} - e^0) = \pi z_0 - jr(-1 - 1) = \pi z_0 + 2rj.$$

Płaszczyzna zespolona domknięta

Dana jest sfera $\xi^2+\eta^2+(\tau-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ (**sfera Riemanna**).

Każdy punkt płaszczyzny $z\in 0XY$ (utożsamianej ze zbiorem liczb zespolonych $\mathbb{C}$)

łączymy odcinkiem z punktem N=(0,0,1) na sferze. Przecina on tę sferę w punkcie

$$P=(\xi,\eta,\tau)=\Big(\frac{x}{1+|z|^2},\frac{y}{1+|z|^2},\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\Big).$$

Jest to przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne między sferą (bez N),

a zbiorem $\mathbb{C}$ (tzw. rzut stereograficzny).

W ten sposób każdy punkt sfery, z wyjątkiem N, ma swój odpowiednik w $\mathbb{C}$.

Jeśli $|z|\to\infty$, to $(\xi,\eta,\tau)\to(0,0,1)=$ N. Zatem $(0,0,1)\leftrightarrow\infty$.

Zbiór $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ nazywamy płaszczyzną zespoloną **domkniętą**

(inaczej **płaszczyzną Gaussa**).

Ciągi liczb zespolonych

Def. 1. Ciąg liczb zespolonych (z_n) jest zbieżny do liczby zespolonej z_0

(ozn. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$), jeśli

$$\lim_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0.$$

Uwaga 1. Jeśli $z_n=x_n+jy_n,\ z_0=x_0+jy_0$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0\ \wedge\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$.

Def. 2. Ciąg liczb zespolonych (z_n) jest zbieżny do ∞ (ozn. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$),

jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$.

Przykład 2.

a) Ciąg o wyrazach $a_n=\dfrac{j^n}{n}$, $\quad a_n=(\dfrac{j}{1},\dfrac{-1}{2},\dfrac{-j}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{j}{5},\dfrac{-1}{6},\ldots)$.

Jest to ciąg zbieżny. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{j^n}{n}=0$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{j^n}{n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

b) Ciąg o wyrazach $b_n=(-1)^n+j^n$ jest ciągiem okresowym:

$$\begin{cases} b_n=2 & \text{dla } n=4k\\ b_n=-1+j & \text{dla } n=4k+1\\ b_n=0 & \text{dla } n=4k+2\\ b_n=-1-j & \text{dla } n=4k+3.\end{cases}$$

Jest to ciąg rozbieżny, bo posiada podciągi zbieżne do różnych granic.

Szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych

Dany jest ciąg liczb zespolonych (z_n).

Tworzymy ciąg sum $(S_n) : S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.

$S_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + j(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$, gdy $z_k = x_k + jy_k$.

Ciąg (S_n) nazywamy **szeregiem liczbowym** (zespolonym) o wyrazie ogólnym z_n i oznaczamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Def. 3. Szereg liczbowy (zespolony) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest **zbieżny**, jeśli ciąg liczb zespolonych (S_n) jest zbieżny do granicy właściwej.

Uwaga 2. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny $\iff$ zbieżne są szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$
i zachodzi wtedy równość $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + j\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Def. 4. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny **bezwzględnie**, jeśli zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.
Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie,
to mówimy, że jest **zbieżny warunkowo**.

Tw. 1. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Przykład 3. Szereg o wyrazach zespolonych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \frac{j}{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + j \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

Jest to szereg zbieżny jako kombinacja szeregów zbieżnych.

Zbieżność bezwzględna:

Szacujemy moduły wyrazów szeregu

$$|z_n| = \left|\frac{(-1)^n + \frac{j}{2n}}{n}\right| = \frac{1}{n}\left|(-1)^n + j\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{n}\sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}} > \frac{1}{n}$$

Szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego
szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ o wyrazach większych też jest rozbieżny.
Wniosek: badany szereg jest zbieżny warunkowo.

Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

Niech $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $z = x + jy \overset{f}{\mapsto} w = u + jv = u(x, y) + jv(x, y)$.

$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ – **część rzeczywista** funkcji $f(z)$,

$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ – **część urojona** funkcji $f(z)$.

Funkcje zmiennej zespolonej to między innymi: wielomiany i funkcje wymierne, gdzie argumentem jest $z, \overline{z}, |z|, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$.
Na przykład $f(z) = jz^3 + |z|z^4 + \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$.

Przykład 4. Dla funkcji $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$ wyznaczymy $\operatorname{Re} f(z)$ i $\operatorname{Im} f(z)$.

$f(z) = f(x + jy) = \dfrac{x - jy}{x + jy} = \dfrac{x - jy}{x + jy} \cdot \dfrac{x - jy}{x - jy} = \dfrac{x^2 - y^2 - 2xyj}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\dfrac{-2xy}{x^2 + y^2}$

$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = \dfrac{-2xy}{x^2 + y^2}$.

Funkcja wykładnicza argumentu zespolonego

$$e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x(\cos y + j \sin y) = e^x \cos y + je^x \sin y.$$

Funkcja wykładnicza jest sumą zespolonego szeregu potęgowego $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

$e^{1-\pi j} = e^1 \cdot e^{-\pi j} = e(\cos(-\pi) + j \sin(-\pi)) = e(\cos(\pi) + j \sin(\pi)) = e^{1+\pi j} = -e$

Zauważmy, że otrzymana wartość jest ujemną liczbą rzeczywistą, co nie byłoby możliwe dla rzeczywistej funkcji e^x.

Uwaga 3. Własności funkcji wykładniczej:

1. jeśli $z = x \in \mathbb{R}$, to $e^z = e^x \in \mathbb{R}$;
2. $e^{jk\pi} = (-1)^k$, $e^{j2k\pi} = 1$, k – liczba całkowita;
3. funkcja e^z jest okresowa: $e^{z+j2k\pi} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, k – liczba całkowita.

Funkcja e^z może przyjmować dowolne niezerowe wartości zespolone.

Przykład 5. Wyznaczyć z spełniające równość $e^z = w = r(\cos\phi + j \sin\phi)$.

Mamy $e^z = e^{x+jy} = e^x(\cos y + j \sin y) = r(\cos\phi + j \sin\phi)$,

a ta równość zachodzi, gdy $e^x = r$, $y = \phi + 2k\pi$, czyli $x = \ln r, \quad y = \phi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 6. Rozwiązać równanie $e^z = e^{\overline{z}}$.

$e^{x+jy} = e^{x-jy}$

$e^x e^{jy} = e^x e^{-jy} \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{R},\; y = -y + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$

Równość jest spełniona, gdy $x \in \mathbb{R},\; y = k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

Na płaszczyźnie zespolonej zbiór rozwiązań to nieskończony zbiór poziomych prostych o równaniach $y = k\pi$.

Warto zapamiętać:

1. $e^z \neq 0$
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
3. $e^{z_1} = e^{z_2} \;\Leftrightarrow\; z_1 = z_2 + j2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcje trygonometryczne argumentu zespolonego

$$\sin z \overset{def}{=} \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}, \qquad \cos z \overset{def}{=} \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

Definujemy również

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

oraz funkcje hiperboliczne – sinus hiperboliczny i cosinus hiperboloczny analogicznie jak funkcje rzeczywiste

$$\operatorname{sh} z = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Uwaga 4. Własności funkcji trygonometrycznych

1. jeśli $z = x \in \mathbb{R}$, to $\sin z = \sin x$ oraz $\cos z = \cos x$
   (dla argumentów rzeczywistych funkcje te mają takie własności, jak rzeczywiste funkcje trygonometryczne);
2. $\sin z$ jest funkcją nieparzystą $\sin(-z) = -\sin z$;
3. $\cos z$ jest funkcją parzystą $\cos(-z) = \cos z$;
4. $\sin z$ jest funkcją okresową: $\sin z = \sin(z + 2k\pi)$;
5. $\cos z$ jest funkcją okresową: $\cos z = \cos(z + 2k\pi)$;
6. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$; (jedynka trygonometryczna)

7. Funkcje $\sin z$ i $\cos z$ są nieograniczone tzn. $|\sin z|$ oraz $|\cos z|$ mogą przyjmować dowolne nieujemne wartości rzeczywiste.

8. $\sin z = \sin x \cdot \mathrm{ch} y + j \cos x \cdot \mathrm{sh} y, \quad \cos z = \cos x \cdot \mathrm{ch} y - j \sin x \cdot \mathrm{sh} y.$

Przykład 7.

Obliczymy:

$\cos j = \dfrac{e^{j \cdot j} + e^{-j \cdot j}}{2} = \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} = \cosh 1$ - wartość jest liczbą rzeczywistą > 1.

$\sin(\pi + j) = \dfrac{e^{j(\pi+j)} - e^{-j(\pi+j)}}{2j} = \dfrac{e^{-1} e^{j\pi} - e \cdot e^{-j\pi}}{2j} = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2j} = -j \cdot \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} = -j \sinh 1$

Wyznaczymy część rzeczywistą i część urojoną funkcji $\sin z$.

$$\sin z = \frac{e^{j(x+jy)} - e^{-j(x+jy)}}{2j} = \frac{e^{-y+jx} - e^{y-jx}}{2j} = \frac{e^{-y}(\cos x + j \sin x) - e^{y}(\cos x - j \sin x)}{2j} =$$
$$= \frac{e^{-y} \sin x + e^{y} \sin x}{2} + \frac{e^{-y} \cos x - e^{y} \cos x}{2j} = \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + j \cos x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} =$$
$$= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$$

Otrzymujemy

$\mathrm{Re}\,(\sin z) = \sin x \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \sin x \cosh y$

$\mathrm{Im}\,(\sin z) = \cos x \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \cos x \sinh y.$

Przykład 8. Rozwiązać równanie $\sin z = -2j$.

$\sin z = -2j \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(\sin z) = 0$ i $\mathrm{Im}\,(\sin z) = -2$

$\mathrm{Re}\,(\sin z) = \sin x \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} = 0,$ gdy $\sin x = 0,$ bo $\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} \in \mathbb{R}_+$

Stąd rozwiązania spełniają warunek: $x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Ponadto musi być $\mathrm{Im}\,(\sin z) = \cos x \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = -2.$

Gdy $x = 2k\pi$, to $\cos x = 1$, więc dostajemy równanie $\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = -2,$

a jego rozwiązanie to $y = \ln(\sqrt{5} - 2)$.

Gdy $x = \pi + 2k\pi$, to $\cos x = -1$, więc dostajemy równanie $-\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = -2,$

a jego rozwiązanie to $y = \ln(\sqrt{5} + 2)$.

Ostatecznie rozwiązania są postaci:

$z = 2k\pi + j \ln(\sqrt{5} - 2)$ oraz $z = \pi + 2k\pi + j \ln(\sqrt{5} + 2)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Granica funkcji zmiennej zespolonej

Zał. Funkcja $f(z)$ jest określona w pewnym otoczeniu U punktu z_0, $\gamma = \alpha + j\beta$.

Def. 5. Liczba γ jest granicą funkcji f w punkcie z_0 (ozn. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \gamma$), jeśli

$$\forall (z_n) \subseteq U \ [z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to \gamma]$$

Uwaga 5. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \gamma \iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \wedge \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta.$

Def. 6. Funkcja f (określona na pewnym otoczeniu punktu z_0) jest ciągła w z_0, jeśli

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Funkcja f jest ciągła w zbiorze $D \subseteq \mathbb{C}$, jesli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Przykład 9. Sprawdzimy, czy istnieje granica $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$

Niech $z = r(\cos\phi + j\sin\phi)$, $r \in \mathbb{R}_+$.

Warunek $z \to 0$ jest równoważny warunkowi $r \to 0$.

$\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{r(\cos\phi - j\sin\phi)}{r(\cos\phi + j\sin\phi)} = \dfrac{\cos\phi - j\sin\phi}{\cos\phi + j\sin\phi} = \cos 2\phi - j\sin 2\phi = e^{-2\phi j}$

Otrzymana wartość zależy od kąta ϕ. Nie będzie konkretną liczbą $\lim\limits_{r\to z_0} \dfrac{\overline{z}}{z}$, bo zależy z jakiego kierunku ciąg argumentów (z_n) zbiega do 0. Granica badanego wyrażenia nie istnieje.

Przykład 10. Wyznaczymy granicę $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{|z|}$.

Zauważmy, że $\left|\dfrac{z^2}{|z|}\right| = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z|$.

Stąd $\lim\limits_{z\to 0}\left|\dfrac{z^2}{|z|}\right| = \lim\limits_{z\to 0} |z| = 0$, co daje $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{|z|} = 0$.