Szeregi potęgowe

Def. 1. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots,$$

gdzie $a_n \in \mathbb{R}$ – współczynniki liczbowe, x_0 – ustalona liczba rzeczywista, a x oznacza zmienną.

Przykład 1.

Rozważmy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+2)^n = 1 + (x+2) + (x+2)^2 + \ldots + (x+2)^n + \ldots$.

Mamy tu $a_n = 1$, $x_0 = -2$.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = x+2$,

więc jest to szereg zbieżny, gdy $|q| = |x+2| < 1$, czyli dla $x \in (-3,-1)$.

Korzystając z własności szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \dfrac{a}{1-q}$ dostaniemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n = \frac{1}{1-(x+2)} = \frac{-1}{1+x}, \quad \text{dla } x \in (-3,-1).$$

Dla $x_0 = 0$ szereg potęgowy ma postać: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Dalej będziemy rozważać tylko takie szeregi potęgowe.

Inne szeregi potęgowe dają się sprowadzić do postaci takiego właśnie szeregu w następujący sposób:

dla szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ wprowadzamy pomocniczą zmienną $t = x - x_0$

i dostajemy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Przykład 2.

Rozważmy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = x$,

więc jest to szereg zbieżny, gdy $|q| = |x| < 1$, czyli dla $x \in (-1,\ 1)$.

Korzystając z własności szeregu geometrycznego dostaniemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{dla } x \in (-1,\ 1).$$

Uwaga: Jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla pewnej wartości $x = \rho \neq 0$,
to jest zbieżny dla każdego $x \in (-|\rho|, |\rho|)$.

Niech $X = \{x \in \mathbb{R} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny}\}$. $X \neq \emptyset$, bo $0 \in X$.

Zatem zbiór $\{|x| : x \in X\}$ jest niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$, więc posiada kresy; jego kres dolny jest równy 0, a jego kres górny oznaczamy przez R i nazywamy **promieniem zbieżności** szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Oczywiście $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.

Uwaga: Jeżeli promień zbieżności R jest

1. równy 0, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny tylko w punkcie $x = 0$;
2. równy $+\infty$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
3. $0 < R < +\infty$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w przedziale $(-R, R)$ zaś w zbiorze $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ jest rozbieżny.

   Wtedy jest zbieżny w pewnym przedziale zwanym **przedziałem zbieżności**. Jest to jeden z następujących przedziałów:

$$(-R, R), \ [-R, R), \ (-R, R], \ [R, R].$$

Przykład 3.
Przedział zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ to $(-1, \ 1)$, a promień zbieżności tego szeregu jest równy $R = 1$.

Uwaga: Promień zbieżności szeregu to połowa długości przedziału zbieżność w przypadku, gdy $R < +\infty$.

Tw. 1. Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lambda$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, to promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest równy $R = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda = +\infty \\ \frac{1}{\lambda} & , \quad 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty & , \quad \lambda = 0 \end{cases}$

Przykład 4. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności szeregów.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ dla tego szeregu $a_n = \dfrac{1}{n!}$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

więc promień zbieżności $R = +\infty$, a przedział zbieżności to $(-\infty, +\infty)$.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$ dla tego szeregu $a_n = n!$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = +\infty,$$

więc promień zbieżności $R = 0$, a szereg jest zbieżny tylko w punkcie $x = 0$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ dla tego szeregu $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

więc promień zbieżności $R = 1$ i szereg jest na pewno zbieżny w przedziale $(-1, 1)$.

Należy jeszcze sprawdzić zbieżność szeregu na krańcach przedziału.

Dla $x = 1$ dostajemy szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, który jest zbieżny (kryt. Leibniza – zbieżność zbadana w przykladzie 8a na wykładzie 7).

Dla $x = -1$ dostajemy szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, który jest rozbieżny (kryt. całkowe – przykład 3. na wykładzie 7).

Przedział zbieżności szeregu to $(-1, 1]$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = x - 1$. Dostajemy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$.

Dla tego szeregu $a_n = \frac{1}{n}$, $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,

więc promień zbieżności (względem zmiennej t) $R = 1$ i szereg jest na pewno zbieżny, gdy $|t| < 1$.

Oznacza to, że szereg jest na pewno zbieżny, gdy $|x-1| < 1$, czyli dla $x \in (0,\ 2)$.

Należy jeszcze sprawdzić zbieżność szeregu na krańcach przedziału.

Dla $x = 0$ dostajemy szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, który jest zbieżny (kryt. Leibniza – zbieżność zbadana w przykladzie 8a na wykładzie 7).

Dla $x = 2$ dostajemy szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, który jest rozbieżny (kryt. całkowe – przykład 3. na wykładzie 7).

Przedział zbieżności szeregu to $[0,\ 2)$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^2}$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = 2x + 3$.

Dostajemy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$.

Dla tego szeregu $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$,

więc promień zbieżności (względem t) wynosi $R = 1$ i szereg jest na pewno zbieżny, gdy $|t| < 1$.

Oznacza to, że szereg jest na pewno zbieżny, gdy $|2x+3| < 1$, czyli dla $x \in (-2,\ -1)$.

Promień zbieżności szeregu (względem zmiennej x) jest równy połowie długości przedziału $(-2,\ -1)$, więc jest równy $\frac{1}{2}$. Należy jeszcze sprawdzić zbieżność szeregu na krańcach przedziału.

Dla $x = -1$ dostajemy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2}$, który jest zbieżny (przykład 3. na wykładzie 7).

Dla $x = -2$ dostajemy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, który jest zbieżny, gdyż jest zbieżny bezwzględnie.

Przedział zbieżności szeregu to $[-2, -1]$.

Def. 2. Sumą szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nazywamy funkcję $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Tw. 2. Jeżeli $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,
to jego suma $S(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $(-R, R)$.
Ponadto jeżeli szereg liczbowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest zbieżny,
to funkcja $S(x)$ jest ciągła (lewostronnie) w punkcie $x = R$;
jeżeli szereg liczbowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ jest zbieżny,
to funkcja $S(x)$ jest ciągła (prawostronnie) w punkcie $x = -R$.

Tw. 3. Jeżeli $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,
to jego suma $S(x)$ jest funkcją całkowalną w przedziale $(-R, R)$
oraz dla każdego $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Przykład 5. Zastosujemy twierdzenie 2. i 3. do szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ z przykładu 2.

Wiemy, że jego suma $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ jest funkcją ciągłą i całkowalną w przedziale $(-1, 1)$.

Zastosujemy wzór z twierdzenia 3. (przechodzenie z całką pod znak sumy).

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Big) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Z drugiej strony mamy

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln|1-x| = \ln\frac{1}{|x-1|}$$

Dostajemy równość: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x| = \ln\frac{1}{|x-1|}.$$

Możemy obliczyć sumy otrzymanego szeregu potęgowego dla różnych $x \in (-1, 1)$.

Na przykład wstawiając $x = \frac{1}{2}$, dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = -\ln|1 - \frac{1}{2}| = \ln 2,$$

a wstawiając $x = -\frac{1}{2}$, dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} = -\ln|1 + \frac{1}{2}| = -\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{3}.$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ jest zbieżny również dla $x = -1$,
więc jego suma jest funkcją prawostronnie ciągłą w punkcie $x = -1$,
stąd $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{x \to -1^+} -\ln|1-(-1)| = -\ln 2.$

Tw. 4. Jeżeli $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,
to jego suma $S(x)$ posiada pochodną w przedziale $(-R, R)$
oraz dla każdego $x \in (-R, R)$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

Uwaga: Szeregi, o których mowa w dwóch poprzednich twierdzeniach, są też szeregami potęgowymi i ich promienie zbieżności są równe R.

Przykład 6. Zastosujemy twierdzenie 4. do szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Suma szeregu $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ posiada pochodną przedziale $(-1, 1)$.

Zastosujemy wzór z tw. 4. (przejście z różniczkowaniem pod znak sumy)

$S'(x) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\Big)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

Z drugiej strony mamy $S'(x) = \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Dostajemy równość: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ dla $x \in (-1,\ 1)$

Dla $x \neq 0$ możemy zapisać $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \dfrac{x^n}{x} = \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

a stąd mamy równość: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, dla $x \in (-1,\ 1)$.

Możemy obliczyć sumy szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$ dla różnych $x \in (-1, 1)$.

Na przykład wstawiając $x = \frac{1}{2}$, dostaniemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$

Przykład 7. Wykazać, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Sprawdzone zostało w przykładzie 4a, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$.

Zgodnie z tw. 4. suma tego szeregu $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ jest funkcją różniczkowalną w zbiorze $\mathbb{R}$.
Możemy obliczyć jej pochodną

$S'(x) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}\Big)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\dfrac{x^n}{n!}\Big)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n x^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = S(x)$

(przenumerowano wyrazy szeregu, przyjmując $k = n - 1$)

Widzimy, że funkcja, która jest sumą szeregu spełnia równanie różniczkowe: $S'(x) = S(x)$.

Ponadto $S(0) = \dfrac{0^0}{0!} + 0 + 0 + \ldots = 1$, bo $0^0 = 1$, $0! = 1$.

Jedyną funkcją rzeczywistą spełniającą takie zagadnienie jest $S(x) = e^x$. $\square$