Szeregi liczbowe

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – dowolny ciąg liczbowy (nieskończony).

Definiujemy nowy ciąg (S_n) o wyrazie ogólnym $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Def. Ciąg liczbowy (S_n) nazywamy **szeregiem liczbowym** o wyrazie ogólnym a_n i oznaczamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym, jeśli istnieje granica właściwa $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

W przeciwnym wypadku szereg jest rozbieżny.

Liczbę S nazywamy sumą szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, piszemy też $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uwaga: Symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oznacza i szereg o wyrazach a_n, i sumę tego szeregu.

Przykład 1. Zbadać z definicji zbieżność podanych szeregów.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

Zauważmy, że $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Dostajemy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Tak więc szereg jest zbieżny, a jego suma $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Dla parzystej liczby składników mamy $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0$,

a dla nieparzystej – $S_{2n-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (-1)^k = -1$.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

Def. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **są równe** $\Leftrightarrow$ $a_n = b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Sumą szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Jeżeli oba szeregi są zbieżne i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Przyjmujemy ponadto: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{R}$.

Tw. 1. (**Warunek konieczny zbieżności szeregu**)

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Przykład 2. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ jest rozbieżny.

Dla danego szeregu wyraz $a_n = 2^n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Na tej podstawie możemy stwierdzić, że szereg jest rozbieżny.

Warunki wystarczające zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych

Uwaga 1. Jeśli $a_n \geqslant 0$, to ciąg sum częściowych (S_n) jest niemalejący.

Zatem ciąg sum (S_n) jest zbieżny $\Leftrightarrow$ jest ograniczony.

Tw. 2. (**kryterium całkowe** zbieżności szeregów liczbowych)

Niech m oznacza dowolną liczbę naturalną.

Jeżeli funkcja f jest nierosnąca i nieujemna na przedziale $[m, +\infty)$,

to szereg liczbowy $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ i całka $\int\limits_{m}^{+\infty} f(x)dx$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

Przykład 3. Zbadać, dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny, a dla jakich rozbieżny.

Na początku sprawdzimy warunek konieczny zbieżności szeregu.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ jedynie dla $\alpha > 0$.

Dla $\alpha \leqslant 0$ warunek konieczny nie jest spełniony, więc wtedy szereg jest rozbieżny.

Spełnienie warunku koniecznego nie wystarczy, by stwierdzić zbieżność szeregu.

Należy wykorzystać inne kryterium, by zbadać zbieżność szeregu dla $\alpha > 0$.

Wykorzystamy kryterium całkowe. Możemy je zastosować dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$,

bo ma ona wartości dodatnie i jest malejąca dla $x > 0$ i $\alpha > 0$.

Badamy zbieżność całki $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_1^\infty x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^T = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ \\ \lim\limits_{T\to\infty} \ln|x|\Big|_1^T = \lim\limits_{T\to\infty} \ln T - \ln 1 & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{dla } \alpha > 1; \\ +\infty & \text{dla } \alpha < 1; \\ +\infty & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases}$$

Całka jest zbieżna jedynie dla $\alpha > 1$ i dla takich α zbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$.

Dla pozostałych α zarówno całka jak i szereg są rozbieżne.

W szczególności rozbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, zwany **szeregiem harmonicznym**.

Tw. 3. (**kryterium porównawcze**) Jeżeli $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ oraz $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty b_n$ są szeregami o wyrazach nieujemnych, oraz $a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant n_0$, to

1. jeżeli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty b_n$ jest rozbieżny;
2. jeżeli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny.

Przykład 4. Zbadać zbieżność szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\cdot 2^n}$

Zauważmy, że $0 \leqslant a_n = \dfrac{1}{n\cdot 2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$,

a szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Korzystając z kryterium porównawczego dostajemy, że badany szereg jest zbieżny.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\cdot \mathrm{arctg} n}$

Z własności funkcji arcus tangens mamy: $\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}1 \leqslant \mathrm{arctg}n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Stąd $\dfrac{4}{n\pi} = \dfrac{1}{n\cdot\frac{\pi}{4}} \geqslant \dfrac{1}{n\cdot\mathrm{arctg}n} \geqslant \dfrac{1}{n\cdot\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{n\pi}$.

Istotne jest oszacowanie wyrazów szeregu z dołu $a_n = \dfrac{1}{n\cdot\mathrm{arctg}n} \geqslant \dfrac{2}{n\pi}$.

Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (patrz przyklad 3).

Korzystając z kryterium porównawczego dla szeregów $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\cdot\mathrm{arctg}n}$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n\pi}$,

dostajemy, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\cdot\mathrm{arctg}n}$ jest rozbieżny.

Tw. 4. (**kryterium Cauchy'ego**) Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych i istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$ (właściwa lub niewłaściwa), to

1. jeżeli $0 \leqslant g < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
2. jeżeli $g > 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}$.

Wyrazy szeregu są nieujemne i mamy oszacowanie z góry

$$a_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n} \leqslant \frac{4^n + 4^n}{4^n + 5^n} = \frac{2 \cdot 4^n}{4^n + 5^n} \leqslant \frac{2 \cdot 4^n}{5^n} = 2 \cdot \Big(\frac{4}{5}\Big)^n.$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \Big(\dfrac{4}{5}\Big)^n$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{4}{5}$,

więc korzystając z kryterium porównawczego, dostajemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}$ też jest zbieżny.

Możemy wykorzystać kryterium Cauchy'ego. Badamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n}} = \dfrac{4}{5} < 1.$

Zgodnie z kryterium Cauchy'ego szereg jest zbieżny.

Tw. 5. (**kryterium d'Alemberta**) Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich i istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = g$ (właściwa lub niewłaściwa), to

1. jeżeli $0 \leqslant g < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
2. jeżeli $g > 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

W obu twierdzeniach jeśli $g = 1$, to kryterium nie rozstrzyga o zbieżności badanego szeregu.

Przykład 6. Zbadać, dla jakich $a > 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n \cdot n!}{n^n}$ jest zbieżny, a dla jakich rozbieżny.

Wykorzystamy kryterium d'Alemberta. Badamy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Mamy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{a^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{a^n \cdot n!}{n^n}} = \dfrac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \dfrac{n^n}{a^n \cdot n!} = \dfrac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \dfrac{(n+1)!}{n!} \cdot \dfrac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} =$

$$= \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = a\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{-n} = a\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-n}.$$

Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n = e$, więc

$$g = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} = \lim_{n\to\infty} a\Big[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big]^{-1} = \frac{a}{e}.$$

Zgodnie z kryterium d'Alemberta, gdy $\dfrac{a}{e} < 1$, szereg jest zbieżny, czyli dla $a \in (0, e)$;

gdy $\dfrac{a}{e} > 1$, szereg jest rozbieżny, czyli dla $a \in (e, +\infty)$.

Oddzielnie spawdzimy przypadek dla $a = e$.

Wtedy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

Z własności ciągu o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^n$ wiadomo, że jest to ciąg rosnący, zbieżny do e,

więc ciąg o wyrazach $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$ jest malejący i zbieżny do 1.

W takim razie wszystkie wyrazy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ są większe od 1.

Mamy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, stąd $a_{n+1} > a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
czyli ciąg o dodatnich wyrazach a_n jest rosnący.

Wnioskujemy, że ciąg wyrazów a_n dla $a = e$ jest ciągiem rosnącym o wyrazach dodatnich,

więc nie może być zbieżny do 0,

a to oznacza, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Ostatecznie mamy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n\cdot n!}{n^n}$ jest rozbieżny.

Tw. 6. (**kryterium ilorazowe**)
Jeżeli dla szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ wyrazy $a_n > 0$ i $b_n > 0$ dla wszystkich $n \geqslant n_0$

oraz istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = k$, gdzie $0 < k < +\infty$,

to szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Przykład 7. Zabadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^3-5n^2+2}{n^5-7n+3}$.

Zastosujemy kryterium ilorazowe.

$a_n = \dfrac{2n^3-5n^2+2}{n^5-7n+3}$ (wyrazy $a_n > 0$ dla n począwszy od pewnego n_0,
co wynika z własności wielomianów o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze)

Niech $b_n = \dfrac{n^3}{n^5} = \dfrac{1}{n^2}$. Wiadomo, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-5n^2+2}{n^5-7n+3}\cdot n^2 = 2.$$

Zachodzi warunek $0 < 2 < +\infty$, więc z kryt. ilorazowego wynika, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Def. Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ lub $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$,
gdzie $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

Tw. 7. (**kryterium Leibniza**)
Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny (podobnie szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$).

Przykład 8. Zbadać zbieżność szeregów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Jest to szereg naprzemienny z $a_n = \frac{1}{n}$.

Ciąg o wyrazch $\frac{1}{n}$ jest malejący i zbieżny do 0, więc spełnione są założenia kryterium Leibniza, w takim razie dany szereg jest zbieżny.

Podobnie zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^7}$.

Jest to szereg naprzemienny z $a_n = \frac{1}{n^7}$.

Ciąg o wyrazch $\frac{1}{n^7}$ jest malejący i zbieżny do 0, więc spełnione są założenia kryterium Leibniza, w takim razie dany szereg jest zbieżny.

Podobnie zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^7}$.

O szeregu zbieżnym $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mówimy, że jest zbieżny **bezwzględnie**, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest rozbieżny,

to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny **warunkowo**.

Przykład 9. Zbadać bezwzględną i warunkową zbieżność szeregów z przykładu 8.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Sprawdzono już, że jest to szereg zbieżny.

Aby stwierdzić, czy jest on zbieżny bezwzględnie, należy sprawdzić, czy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$.

Mamy $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Wiemy, że ten szereg jest rozbieżny (patrz przykład 3. szereg harmoniczny).

Ostatecznie badany szereg nie jest zbieżny bezwzględnie, jest zbieżny warunkowo.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^7}$.

Sprawdzono już, że jest to szereg zbieżny.

Aby stwierdzić, czy jest on zbieżny bezwzględnie, należy sprawdzić, czy zbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^7}\right|$.

Mamy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^7}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$.

Wiemy, że ten szereg jest zbieżny (patrz przykład 3. $(\alpha = 7 > 1)$).

Ostatecznie badany szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Tw. 8. Jeżeli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Przykład 10. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$.

Badany szereg ma wyrazy i dodatnie i ujemne, gdyż wyrażenie $\sin n^2$ może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne.

Zbadamy bezwzględną zbieżność szeregu, czyli zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n^2}{n^2}\right|$.

Mamy oszacowanie dla wyrazów szeregu $0 \leqslant \left|\dfrac{\sin n^2}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Korzystamy z kryterium porównawczego dla szeregów $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n^2}{n^2}\right|$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Wiemy, że ten szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (patrz przykład 3. $(\alpha = 2 > 1)$),

więc na mocy kryterium porównawczego zbieżny jest również szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n^2}{n^2}\right|$.

Oznacza to, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie.

Nie musimy już sprawdzać zbieżności tego szeregu, bo zgodnie z twierdzeniem 8. jego zbieżność wynika ze zbieżności bezwzględnej.