Macierze

Niech $\mathbb{K}$ będzie ustalonym ciałem, $m, n \in \mathbb{N}$.

Def. **Macierzą** o wymiarach m na n nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję
$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{K}, \quad (i, j) \mapsto a_{ij} \in \mathbb{K}$

Wartości funkcji A nazywamy **wyrazami** macierzy.

Wartość, którą funkcja A przyporządkowuje elementowi (i, j), oznaczamy a_{ij}.

Macierz o wymiarach m na n oznacza się symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$
(ewentualnie przez $[a_{ij}]$ jeśli to nie prowadzi do nieporozumień).

Macierz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ przedstawia się w postaci tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ nazywa się **i-tym wierszem** macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$,

zaś **j-tą kolumną** macierzy A nazywamy macierz $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

Symbolem $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ oznaczamy zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ i elementach z ciała $\mathbb{K}$.

Def. Macierz, której wszystkie wyrazy sa równe 0 nazywamy **macierzą zerową** i oznaczamy symbolem $\mathbf{0}$ (lub $\mathbf{0}_{m\times n}$).

Def. Macierz A o wymiarach $n \times n$ nazywamy **macierzą kwadratową** (stopnia n).
Ciąg $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ nazywamy wtedy **główną przekątną** macierzy A (lub diagonalą).

Przykłady

1. Macierz trójkątna górna.
2. Macierz trójkątna dolna.
3. Macierz diagonalna, ozn. $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.
4. Macierz jednostkowa, ozn. I lub I_n.

W zbiorze $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiuje się

dodawanie macierzy: $[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

oraz **mnożenie macierzy przez skalar** $\alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$.

Tw. Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i dowolnych skalarów $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ zachodzą następujące równości:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
4. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

Def. **Iloczynem** macierzy $[a_{ik}]_{m\times p} \cdot [b_{kj}]_{p\times n}$ nazywamy macierz $[c_{ij}]_{m\times n}$, taką że

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{dla } i \in \{1, ..., m\},\ j \in \{1, ..., n\}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{i1}} & \underline{a_{i2}} & \dots & \underline{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \underline{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & \underline{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \underline{b_{pj}} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \underline{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Uwaga. Mnożenie macierzy $A \cdot B$ jest wykonalne, jeśli macierz A ma tyle kolumn, ile wierszy ma macierz B.

Własności mnożenia macierzy

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{K}),\ C \in M_{p\times r}(\mathbb{K})$
2. $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$ dla $\alpha \in \mathbb{K},\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$
5. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ dla $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$

Uwaga. Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Jeśli A jest macierzą kwadratową, to istnieje iloczyn $A \cdot A \cdot ... \cdot A \overset{ozn.}{=} A^n$.

Def. **Macierzą transponowaną** macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, gdzie $b_{ij} = a_{ji}$ dla dowolnych $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ...n\}$.

Uwaga. Macierz transponowana A^T jest to macierz, której kolumnami są wiersze macierzy A, natomiast wierszami – kolumny macierzy A.

Własności transpozycji macierzy

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dla $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. $(A^T)^T = A$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ dla $\alpha \in \mathbb{K}, \quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$

Macierz odwrotna do danej macierzy kwadratowej

Def. **Macierzą odwrotną** do macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy taką macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \quad (ozn.\ \ B = A^{-1})$$

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to jest ona wyznaczona jednoznacznie, zaś A nazywamy macierzą **odwracalną**.

Uwaga. Nie każda macierz kwadratowa jest odwracalna.

Własności

1. Jeśli A jest macierzą odwracalną, to $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Jeśli A jest macierzą odwracalną, to A^T jest macierzą odwracalną i $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. Jeśli $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ są macierzami odwracalnymi, to $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą eliminacji:
Zapisujemy macierz $[A|I]$
(z prawej stony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową I, takiego wymiaru jak A).
Następnie wykonujemy serię operacji na wierszach macierzy $[A|I]$, tak aby uzyskać macierz postaci $[I|B]$ (macierz jednostkowa ma powstać w miejscu macierzy A).
Jesli uzyskamy taką postać macierzy, to wtedy macierz $B = A^{-1}$.
Możemy wykonywać następujące operacje na wierszach przekształcanej macierzy $[A|I]$:

- mnożenie wiersza przez skalar różny od zera $(\alpha \cdot w_i)$,
- dodawanie do wiersza wielokrotności innego wiersza $(w_i + \alpha \cdot w_j)$,
- zamiana wierszy miejscami $(w_i \longleftrightarrow w_j)$.