

PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

Def. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem \mathbb{K} .

Funkcję $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy **przekształceniem liniowym** (przeobrażeniem V w przestrzeń W), jeśli dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{K}$ zachodzą równości

- 1) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ (przekształcenie jest addytywne),
- 2) $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$ (przekształcenie jest jednorodne).

Przykład 1.**a) Przekształcenie zerowe**

$$\varphi : V \rightarrow W, \quad \forall v \in V \quad \varphi(v) = \mathbf{0}_W$$

każdemu wektorowi dziedziny zostaje przyporządkowany wektor zerowy przestrzeni W .

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$, wtedy

$$\varphi(u + v) = \mathbf{0}_W \quad \text{oraz} \quad \varphi(u) + \varphi(v) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W;$$

$$\varphi(\alpha v) = \mathbf{0}_W \quad \text{oraz} \quad \alpha \cdot \varphi(v) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W.$$

b) Przekształcenie identycznościowe $\text{id}_V : V \rightarrow V, \quad \forall v \in V \quad \text{id}_V(v) = v$

każdemu wektorowi zostaje przyporządkowany ten sam wektor.

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$, wtedy

$$\text{id}_V(u + v) = u + v \quad \text{oraz} \quad \text{id}_V(u) + \text{id}_V(v) = u + v;$$

$$\text{id}_V(\alpha v) = \alpha v \quad \text{oraz} \quad (\alpha \text{id}_V)(v) = \alpha v.$$

c) Funkcja $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi((x, y)) = (x + y, x - 3y, 2y)$

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in V, \alpha \in \mathbb{R}$, wtedy

$$\begin{aligned} \phi(u + v) &= \phi((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - 3(y_1 + y_2), 2(y_1 + y_2)) = \\ &= (x_1 + y_1, x_1 - 3y_1, 2y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - 3y_2, 2y_2) = \phi((x_1, y_1)) + \phi((x_2, y_2)) = \phi(u) + \phi(v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha u) &= \phi((\alpha x_1, \alpha y_1)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - 3\alpha y_1, 2\alpha y_1) = \\ &= \alpha(x_1 + y_1, x_1 - 3y_1, 2y_1) = \alpha\phi((x_1, y_1)) = \alpha\phi(u). \end{aligned}$$

d) Funkcja $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(w) = (w(1), w'(2))$

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $w_1, w_2 \in \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Korzystając z własności wielomianów i liniowości pochodnej możemy zapisać

$$\begin{aligned} \phi(w_1 + w_2) &= ((w_1 + w_2)(1), (w_1 + w_2)'(2)) = (w_1(1) + w_2(1), w_1'(2) + w_2'(2)) = \\ &= (w_1(1), w_1'(2)) + (w_2(1), w_2'(2)) = \phi(w_1) + \phi(w_2); \end{aligned}$$

$$\phi(\alpha w_1) = ((\alpha w_1)(1), (\alpha w_1)'(2)) = (\alpha \cdot w_1(1), \alpha \cdot w_1'(2)) = \alpha(w_1(1), w_1'(2)) = \alpha\phi(w_1).$$

Uwaga: Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.

Uwaga: Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym.

Wówczas $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi równość $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Przykład 2.

Czy jest przekształceniem liniowym funkcja $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi((x, y, z)) = (x + y, y - z + 1)$?

Podana funkcja nie jest przekształceniem liniowym, bo $\psi((0, 0, 0)) = (0, 1) \neq (0, 0)$.

Wartość funkcji dla wektora zerowego nie jest wektorem zerowym.

Przykład 3. Przekształcenia geometryczne jako przekształcenia liniowe.

Przekształcenia geometryczne płaszczyzny $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, które są przekształceniami liniowymi to między innymi:

- symetria względem prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$;
- rzut prostokątny na prostą przechodzącą przez punkt $(0, 0)$;
- obrót o ustalony kąt wokół punktu $(0, 0)$.

Tw. 1. Jeżeli $\dim V = n$ i układ (v_1, \dots, v_n) jest bazą przestrzeni V , to dla dowolnej przestrzeni liniowej W i wektorów $w_1, \dots, w_n \in W$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$, takie że $\varphi(v_i) = w_i$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.

Przykład 4. Podać wzór przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

spełniającego warunki: $\phi((2, 1)) = (3, 1)$, $\phi((3, 1)) = (2, 1)$.

Wykorzystamy tw. 1. Wprowadzamy oznaczenia: $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (3, 1)$.

Sprawdzimy, czy układ wektorów $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^2 .

W tym celu zbadamy wyznacznik macierzy $M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A})$.

$$M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Wyznacznik macierzy układu \mathcal{A} jest niezerowy, więc układ ten jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^2 .

W takim razie zgodnie z tw. 1. na podstawie danych wartości przekształcenia dla wektorów bazy, można uzyskać pełną informację o tym przekształceniu, w szczególności jego wzór, czyli $\phi((x, y))$.

Z liniowości ϕ mamy: $\phi((x, y)) = \phi(x(1, 0) + y(0, 1)) = x \cdot \phi((1, 0)) + y \cdot \phi((0, 1))$.

Wystarczy wyznaczyć wartości $\phi((1, 0))$ i $\phi((0, 1))$.

Zauważmy, że $(1, 0) = (3, 1) - (2, 1) = v_2 - v_1$.

Stąd dostaniemy $\phi((1, 0)) = \phi(v_2 - v_1) = \phi(v_2) - \phi(v_1) = (2, 1) - (3, 1) = (-1, 0)$.

Należy jeszcze wyznaczyć $\phi((0, 1))$.

Mamy $(3, 1) = \phi((2, 1)) = \phi(2(1, 0) + (0, 1)) = 2 \cdot \phi((1, 0)) + \phi((0, 1)) = 2 \cdot (-1, 0) + \phi((0, 1))$.

Stąd $\phi((0, 1)) = (3, 1) - 2(-1, 0) = (5, 1)$.

Ostatecznie uzyskamy wzór: $\phi((x, y)) = x \cdot \phi((1, 0)) + y \cdot \phi((0, 1)) = x(-1, 0) + y(5, 1) = (-x + 5y, y)$.

Macierz przekształcenia liniowego

Niech V, W będą skończeniowymi przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem \mathbb{K} .

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ - baza przestrzeni V , $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ - baza przestrzeni W .

Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym.

Każdy wektor $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów z bazy \mathcal{B} .

$$\varphi(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})_{\mathcal{B}}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})_{\mathcal{B}}$$

⋮

$$\varphi(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})_{\mathcal{B}}$$

Macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ nazywamy macierzą przekształcenia φ w bazach \mathcal{A} i \mathcal{B} i oznaczamy symbolem $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Kolumny macierzy $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ są utworzone ze współrzędnych wektorów $\varphi(v_j)$ w bazie \mathcal{B} (dla kolejnych wektorów v_j bazy \mathcal{A}).

Przykład 5. Zapiszemy macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ – baza przestrzeni \mathbb{R}^2 , $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ – baza przestrzeni \mathbb{R}^3 i wiadomo, że $\varphi(v_1) = w_1 + w_3$, $\varphi(v_2) = w_2 - 2w_3$.

Macierz przekształcenia będzie miała dwie kolumny, bo tyle jest wektorów w bazie dziedziny przekształcenia.

W pierwszej kolumnie będzie zapisany wektor $\varphi(v_1) = w_1 + w_3 = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}$,

a w drugiej kolumnie wektor $\varphi(v_2) = w_2 - 2w_3 = (0, 1, -2)_{\mathcal{B}}$.

Stąd $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Uwaga: Macierze tego samego przekształcenia $\varphi : V \rightarrow W$ mogą być różne - zależą od wyboru bazy przestrzeni V i W , ale zawsze są tego samego wymiaru $m \times n$, gdzie $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Przykład 6. Zapiszemy macierze przekształceń z przykładu 1.

a) Macierz przekształcenia zerowego $\varphi : V \rightarrow W$ jest macierzą zerową $[0]_{m \times n}$ (w dowolnych bazach), gdzie $\dim V = n$, $\dim W = m$.

b) Macierz przekształcenia identycznościowego $id : V \rightarrow V$ jest macierzą jednostkową $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id) = I_n$, gdzie $\dim V = n$, \mathcal{B} - baza przestrzeni V .

c) Dla przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi((x, y)) = (x + y, x - 3y, 2y)$

macierz tego przekształcenia w bazach kanonicznych ma postać: $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

gdyż w kolumnach wpisujemy odpowiednio $\phi((1, 0)) = (1, 1, 0)$, $\phi((0, 1)) = (1, -3, 2)$.

d) Dla przekształcenia $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(w) = (w(1), w'(2))$

wyznamy wartości na wektorach z bazy kanonicznej $\mathcal{A} = (x^2, x, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

$$\phi(x^2) = (1, 4), \quad \phi(x) = (1, 1), \quad \phi(1) = (1, 0).$$

Macierz tego przekształcenia w bazach kanonicznych ma postać $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tw. 2. Niech V, W - skończeniowymiarowe przestrzenie liniowe,

\mathcal{A} - baza przestrzeni V , \mathcal{B} - baza przestrzeni W .

Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym, $v \in V, w \in W$.

$$\text{Wówczas } \varphi(v) = w \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = M_{\mathcal{B}}(w)$$

Wniosek. Jeżeli \mathcal{A} i \mathcal{B} są bazami przestrzeni V , to dla dowolnego wektora $v \in V$

$$\text{zachodzi równość } M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = M_{\mathcal{B}}(v).$$

Przykład 7. Dana jest macierz przekształcenia $\phi : V \rightarrow W$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Wyznamy wzór tego przekształcenia dla różnych przestrzeni V i W ,

przyjmując, że \mathcal{A} - baza kanoniczna przestrzeni V , \mathcal{B} - baza kanoniczna przestrzeni W .

a) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$. Z macierzy przekształcenia odczytujemy:

$$\phi((1, 0, 0)) = (2, 1), \quad \phi((0, 1, 0)) = (0, 3), \quad \phi((0, 0, 1)) = (-1, 2).$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd } \phi((x, y, z)) &= x\phi((1, 0, 0)) + y\phi((0, 1, 0)) + z\phi((0, 0, 1)) = x(2, 1) + y(0, 3) + z(-1, 2) = \\ &= (2x - z, x + 3y + 2z). \end{aligned}$$

Można też wykorzystać tw. 2. Mianowicie, jeśli przyjmiemy $v = (x, y, z)$, to

$$M_{\mathcal{E}_2}(\phi(v)) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{E}_3}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - z \\ x + 3y + 2z \end{bmatrix}$$

b) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}_1[x]$. Z macierzy przekształcenia odczytujemy:

$$\phi((1, 0, 0)) = 2x + 1, \quad \phi((0, 1, 0)) = 3, \quad \phi((0, 0, 1)) = -x + 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd } \phi((a, b, c)) &= a\phi((1, 0, 0)) + b\phi((0, 1, 0)) + c\phi((0, 0, 1)) = \\ &= a(2x + 1) + b(3) + c(-x + 2) = (2a - c)x + a + 3b + 2c = (2a - c, a + 3b + 2c)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Można też wykorzystać tw. 2.

Mianowicie, jeśli przyjmiemy $\mathcal{B} = (x, 1)$ $v = (a, b, c)$, to

$$M_{\mathcal{B}}(\phi(v)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{E}_3}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - c \\ a + 3b + 2c \end{bmatrix}.$$

c) Niech $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = (x^2, x, 1)$ - baza $\mathbb{R}_2[x]$. Z macierzy przekształcenia mamy:

$$\phi(x^2) = (2, 1), \quad \phi(x) = (0, 3), \quad \phi(1) = (-1, 2).$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd } \phi(ax^2 + bx + c) &= a\phi(x^2) + b\phi(x) + c\phi(1) = a(2, 1) + b(0, 3) + c(-1, 2) = \\ &= (2a - c, a + 3b + 2c). \end{aligned}$$

Można też wykorzystać tw. 2. Mianowicie, jeśli przyjmiemy $v = ax^2 + bx + c = (a, b, c)_{\mathcal{A}}$, to

$$M_{\mathcal{E}_2}(\phi(v)) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - c \\ a + 3b + 2c \end{bmatrix}$$

d) Niech $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}_1[x]$, $\mathcal{A} = (x^2, x, 1)$ - baza $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (x, 1)$ - baza $\mathbb{R}_1[x]$.

Z macierzy przekształcenia mamy:

$$\phi(x^2) = (2, 1)_{\mathcal{B}} = 2x + 1, \quad \phi(x) = (0, 3)_{\mathcal{B}} = 3, \quad \phi(1) = (-1, 2)_{\mathcal{B}} = -x + 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd } \phi(ax^2 + bx + c) &= a\phi(x^2) + b\phi(x) + c\phi(1) = a(2x - 1) + b(3) + c(-x + 2) = \\ &= (2a - c)x + a + 3b + 2c = (2a - c, a + 3b + 2c)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Można też wykorzystać tw. 2. Mianowicie, jeśli przyjmiemy $v = ax^2 + bx + c = (a, b, c)_{\mathcal{A}}$, to

$$M_{\mathcal{B}}(\phi(v)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - c \\ a + 3b + 2c \end{bmatrix}$$

Tw. 3. Niech $\varphi : V \rightarrow W$ i $\psi : W \rightarrow U$ - przekształcenia liniowe,

gdzie V, W, U - przestrzenie liniowe skończonego wymiaru nad ciałem \mathbb{K} .

Niech \mathcal{A} - baza przestrzeni V , \mathcal{B} - baza przestrzeni W , \mathcal{C} - baza przestrzeni U .

$$\text{Wówczas } M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi).$$

Przykład 8. Wykorzystując macierze wyznaczmy macierz oraz wzór przekształcenia $\psi \circ \phi$,

gdzie $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi((x, y)) = (2x - y, 3y, x - 4y)$, $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi((x, y, z)) = 2x - 5z$.

Macierze tych przekształceń w bazach kanonicznych to:

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3}(\psi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z tw. 3. $M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}(\psi \circ \phi) = M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3}(\psi) \cdot M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 18 \end{bmatrix}$

A stąd $M_{\mathcal{E}_1}((\psi \circ \phi)((x, y))) = M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}(\psi \circ \phi) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 18y \end{bmatrix}$

i wzór $(\psi \circ \phi)((x, y)) = -x + 18y$.

Stw. 1. Jeżeli \mathcal{A} i \mathcal{B} są bazami przestrzeni V , to $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$.

Stw. 2. Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym (V, W - przestrzenie skończonego wymiaru) \mathcal{A}, \mathcal{C} - bazy przestrzeni V , \mathcal{B}, \mathcal{D} - bazy przestrzeni W .

Wówczas zachodzi równość:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(\varphi) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(id)$$

Przykład 9. Wykorzystując macierze wyznaczmy wzór przekształcenia z przykładu 3.

Przypomnijmy: $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, baza $\mathcal{A} = (v_1, v_2) = ((2, 1), (3, 1))$, stąd $M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ponadto $\phi((2, 1)) = (3, 1)$, $\phi((3, 1)) = (2, 1)$,

czyli $\phi(v_1) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = (0, 1)_{\mathcal{A}}$, $\phi(v_2) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = (1, 0)_{\mathcal{A}}$.

Na tej podstawie możemy zapisać macierz przekształcenia w bazie \mathcal{A} $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Wzór przekształcenia możemy odczytać z macierzy przekształcenia w bazach kanonicznych.

Zgodnie ze stwierdzeniem 2. możemy zapisać

$$M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(id) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}_2}(id),$$

gdzie $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(id) = M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}_2}(id) = (M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(id))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Dostajemy $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{A stąd } M_{\mathcal{E}_2}(\phi((x, y))) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\phi) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 5y \\ y \end{bmatrix}.$$

Na tej podstawie dostajemy wzór przekształcenia $\phi((x, y)) = (-x + 5y, y)$.

Def. Jądrem przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy zbiór

$$\text{Ker } \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\}.$$

Def. Obrazem przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy zbiór

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(v) : v \in V\}.$$

Tw. 4. Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy:

$\text{Ker } \varphi$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V ,

$\text{Im } \varphi$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej W .

Tw. 5. Jeśli V jest przestrzenią liniową skończonego wymiaru, to dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ zachodzi równość

$$\dim V = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi.$$

Def. Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym.

Jeśli $\text{Im } \varphi$ jest przestrzenią skończeniowymiarową to liczbę $\dim \text{Im } \varphi$ nazywamy **rzędem** przekształcenia liniowego φ i oznaczamy $r(\varphi)$.

Tw. 6. Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym,

\mathcal{A} - baza przestrzeni V , \mathcal{B} - baza przestrzeni W .

Wówczas $r(\varphi) = r(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi))$.

Uwaga: Rząd macierzy przekształcenia nie zależy od wyboru bazy

(wszystkie macierze tego samego przekształcenia mają jednakowy rząd).

Przykład 10. Wyznaczymy jądro i obraz poznanych przekształceń z przykładu 1.

a) **Przekształcenie zerowe** $\varphi : V \rightarrow W, \forall v \in V \varphi(v) = \mathbf{0}_W$

Jądro przekształcenia $\text{Ker } \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} = V$ - cała dziedzina przekształcenia.

Obraz przekształcenia $\text{Im } \varphi = \{\varphi(v) : v \in V\} = \{\mathbf{0}_W\}$ - podprzestrzeń zerowa przestrzeni W .

Rząd przekształcenia wynosi zero.

b) Przekształcenie identycznościowe $\text{id}_V : V \rightarrow V, \forall v \in V \text{ id}_V(v) = v$

Jądro przekształcenia $\text{Ker } \varphi = \{v \in V : \text{id}(v) = \mathbf{0}_V\} = \{v \in V : v = \mathbf{0}_V\} = \{\mathbf{0}_V\}$ - podprzestrzeń zerowa przestrzeni V .

Obraz przekształcenia $\text{Im } \varphi = \{\text{id}(v) : v \in V\} = \{v \in V\} = V$ - cała dziedzina przekształcenia.

Rząd przekształcenia jest równy wymiarowi przestrzeni V .

c) Funkcja $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi((x, y)) = (x + y, x - 3y, 2y)$

Jądro przekształcenia $\text{Ker } \phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y, x - 3y, 2y) = (0, 0, 0)\}$

Aby wyznaczyć jądro przekształcenia należy rozwiązać jednorodny układ równań

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $(0, 0)$, więc $\text{Ker } \phi = \{(0, 0)\}$ - podprzestrzeń zerowa przestrzeni \mathbb{R}^2 .

Zastosujemy Tw. 5, aby wyznaczyć wymiar obrazu przekształcenia.

$$\dim V = \dim \text{Ker } \phi + \dim \text{Im } \phi$$

W naszym przypadku podstawiamy $\dim V = 2, \dim \text{Ker } \phi = 0$ i dostajemy

$$2 = 0 + \dim \text{Im } \phi \Rightarrow r(\phi) = \dim \text{Im } \phi = 2.$$

Wiemy już, że wymiar obrazu przekształcenia jest równy 2.

Oznacza to, że $\text{Im } \phi$ jest dwuwymiarową podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Obraz przekształcenia $\text{Im } \phi = \{(x + y, x - 3y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Wyznamy bazę tej podprzestrzeni.

Wektory należące do obrazu można zapisać w postaci:

$$w = (x + y, x - 3y, 2y) = x(1, 1, 0) + y(1, -3, 2).$$

Są więc kombinacjami liniowymi wektorów $w_1 = (1, 1, 0)$ i $w_2 = (1, -3, 2)$,

czyli $\text{Im } \phi = \text{Lin}\{(1, 1, 0), (1, -3, 2)\}$.

Układ wektorów $(w_1, w_2) = ((1, 1, 0), (1, -3, 2))$ jest liniowo niezależny, więc jest bazą przestrzeni $\text{Im } \phi$.

Bazę obrazu przekształcenia możemy też wyznaczyć na podstawie macierzy tego przekształcenia.

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

W kolumnach tej macierzy zapisane są wektory, które generują przestrzeń $\text{Im } \phi$.

Zauważmy, że to są właśnie wektory $w_1 = (1, 1, 0)$ i $w_2 = (1, -3, 2)$ wyznaczone wcześniej.

Def. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy **nieosobliwym**, jeśli jest różnowartościowe.

Tw. 7. Niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym (V - ma skończony wymiar).

Następujące warunki są równoważne:

- (1) φ jest przekształceniem nieosobliwym,
- (2) $\text{Ker } \varphi = \{\mathbf{0}_V\}$
- (3) $r(\varphi) = \dim V$.

Def. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy **izomorfizmem**, jeśli jest różnowartościowe i "na". Przestrzenie V i W nazywamy wtedy **izomorficznymi**.

Stw. 3. Przekształcenie $\varphi : V \rightarrow W$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{Ker } \varphi = \{\mathbf{0}_V\} \text{ i } \text{Im } \varphi = W.$$

Uwaga: Wymiary izomorficznych przestrzeni skończone wymiarowych są równe.

Uwaga: Macierz izomorfizmu jest macierzą kwadratową nieosobliwą.

Jeśli V i W są przestrzeniami liniowymi skończeniewymiarowymi i $\dim V = \dim W$ to każde przekształcenie nieosobliwe $\varphi : V \rightarrow W$ jest izomorfizmem.

Przykład 11. Sprawdźmy, czy podane przekształcenie liniowe jest izomorfizmem oraz wyznaczmy jego jądro i obraz.

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi((x, y, z)) = (x - y + z, z - y, y - x - z)$$

Napiszemy wzór w postaci uporządkowanej, aby łatwo zapisać macierz przekształcenia.

$$\phi((x, y, z)) = (x - y + z, -y + z, -x + y - z), \text{ stąd } M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy przekształcenia jest równy 2, bo jedną kolumnę można skreślić ($k_2 = -k_3$) i pozostanie macierz z dwiema kolumnami liniowo niezależnymi.

W takim razie rząd przekształcenia też jest równy 2, więc to nie jest przekształcenie "na", więc nie jest również izomorfizmem.

Obraz przekształcenia jest przestrzenią generowaną przez wektory zapisane w kolumnach macierzy tego przekształcenia. Zauważyliśmy wyżej, że spośród trzech kolumn macierzy możemy wybrać najwyżej dwie, aby mieć układ liniowo niezależny. Wektory zapisane w tych dwóch kolumnach będą stanowiły bazę przestrzeni $\text{Im } \phi$, może to być np. układ $((1, 0, -1), (-1, -1, 1))$.

Jądro przekształcenia to zbiór $\text{Ker } \phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y + z, -y + z, -x + y - z) = (0, 0, 0)\}$

Aby wyznaczyć jądro przekształcenia należy rozwiązać jednorodny układ równań
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Ostatnie równanie możemy pominąć, bo jest wielokrotnością pierwszego.

Macierz zredukowanego układu ma postać $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$

Ostatnia macierz odpowiada układowi

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jądro przekształcenia jest zbiorem wektorów $\text{Ker } \phi = \{(0, y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \text{Lin}\{(0, 1, 1)\}$.

Jest to jednowymiarowa podprzestrzeń przestrzeni \mathbb{R}^3 generowana przez wektor $(0, 1, 1)$.

Układ składający się z tego wektora jest bazą tej podprzestrzeni.

Tw. 8. Każda przestrzeń liniowa wymiaru n nad ciałem \mathbb{K} jest izomorficzna z \mathbb{K}^n .

Przykład 12. Przestrzenie $\mathbb{R}_2[x]$ i \mathbb{R}^3 są izomorficzne. Wskażemy izomorfizm tych przestrzeni.

Niech $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$ - kanoniczna baza przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$,

$\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ - baza kanoniczna przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Izomorfizm $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiujemy następująco:

$\Phi(x^2) = e_1, \quad \Phi(x) = e_2, \quad \Phi(1) = e_3.$ Równoważnie: $\Phi(ax^2 + bx + c) = (a, b, c).$

Macierz tego przekształcenia $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, więc Φ jest izomorfizmem.